Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica

Modulo II

A.A. 2012-2013 Appello 4/07/2013 Traccia A

Cognome .... Nome .... Matr. ....

1) Dopo aver dato la definizione di funzione assolutamente continua e di funzione Lipschitziana, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitziana con $Lip(f) = L > 0$. Dire quali tra le seguenti affermazioni sono vere, giustificando esaurientemente la risposta.

1. f è differenziabile in $\mathbb{R}^n$.
2. f è differenziabile q.o. in $\mathbb{R}^n$ e $\|\nabla f(\mathbf{x})\| \leq L$ per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. Se $n = 1$, f è assolutamente continua.
4. Se $n = 1$, f non è misurabile secondo Lebesgue.

2) Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dia la definizione di differenziabilità di f in un punto x_0 interno ad A. Enunciare e dimostrare il Teorema del differenziale totale.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2(y^2 - 2y - x)$$

determinarne i punti stazionari studiandone la natura.

4) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' = \cos 2x - x^2 \\ y(0) = -\frac{9}{8} \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

5) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D x \, dxdy$$

dove D è il quadrilatero convesso di vertici $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ e $(0, 1)$.

6) (Facoltativo) Siano $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, -x)$ e Σ la semisfera di centro l'origine e raggio 1 nel semispazio $z \geq 0$. Calcolare il flusso di $\mathbf{rot}F$ attraverso la superficie Σ direttamente dalla definizione e utilizzando il teorema di Stokes.

Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica

Modulo II

A.A. 2012-2013 Appello 4/07/2013 Traccia B

Cognome .... Nome .... Matr. ....

1) Dopo aver dato la definizione di funzione assolutamente continua e di funzione Lipschitziana, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitziana con $Lip(f) = L > 0$. Dire quali tra le seguenti affermazioni sono vere, giustificando esaurientemente la risposta.

1. f è differenziabile in $\mathbb{R}^n$.
2. f è differenziabile q.o. in $\mathbb{R}^n$ e $\|\nabla f(\mathbf{x})\| \leq L$ per q.o. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. Se $n = 1$, f non è assolutamente continua.
4. Se $n = 1$, f è misurabile secondo Lebesgue.

2) Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dia la definizione di differenziabilità di f in un punto x_0 interno ad A. Enunciare e dimostrare il Teorema del differenziale totale.

3) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2(y^2 - 2y + x)$$

determinarne i punti stazionari studiandone la natura.

4) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' = x^2 + \sin 2x \\ y(0) = \frac{7}{8} \\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

5) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D y \, dxdy$$

dove D è il quadrilatero convesso di vertici $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$.

6) (Facoltativo) Siano $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, -x)$ e Σ la semisfera di centro l'origine e raggio 1 nel semispazio $z \geq 0$. Calcolare il flusso di $\mathbf{rot}F$ attraverso la superficie Σ direttamente dalla definizione e utilizzando il teorema di Stokes.