I FACOLTÀ DI INGEGNERIA - POLITECNICO DI BARI
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (corso A)
A.A. 2009-2010, Esercizi di Geometria analitica

Negli esercizi che seguono si suppone fissato nello spazio ordinario un riferimento metrico $\mathcal{R}(O, x, y, z) = \mathcal{R}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

1. Siano assegnate la superficie sferica Σ di equazione $x^2+y^2+z^2-2z-3 = 0$ e la retta
$$r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$
   (a) Verificare che la retta r è esterna alla superficie sferica.
   (b) Scrivere l'equazione cartesiana dei piani passanti per r e tangenti alla superficie sferica.

2. Determinare l'equazione della superficie sferica Σ di centro $C(1, -2, -2)$ e tangente alla retta
$$r : \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

3. Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro con generatrici parallele all'asse x e circoscritto alla superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z + 1 = 0$.

4. Siano assegnati il punto $A(3, -3, 1)$ e le rette
$$r : \begin{cases} 2x - y + 3z + 5 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$
ed
$$s : \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$$
   (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per A e parallelo alle rette r ed s.
   (b) Determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica Σ tangente a π in A ed avente centro sul piano xy.

5. Determinare l'equazione cartesiana del cilindro avente come direttrice la curva
$$\gamma : \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 5 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
e generatrici parallele alla retta
$$r : \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

6. Scrivere l'equazione del cono di vertice $V(0, 5, 2)$ e direttrice la curva
$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$$

7. Scrivere l'equazione cartesiana del cono di vertice l'origine O circoscritto alla superficie sferica $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 8 = 0$.

8. Scrivere l'equazione cartesiana della superficie di rotazione generata dalla retta
$$r : \begin{cases} z - 1 = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$$
attorno alla retta
$$a : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

9. Scrivere l'equazione cartesiana delle superfici ottenute dalla rotazione della retta
$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2z \end{cases}$$
attorno all'asse z e dalla rotazione della retta
$$s : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z + 3 = 0 \end{cases}$$
attorno all'asse z.

10. Determinare centro e raggio della circonferenza
$$\sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - x + z - 3 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

11. Dati i punti $A(2,0,0)$, $B(3,2,-1)$ e $C(-2,1,1)$, scrivere le equazioni della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

12. Data la retta
$$r : \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 2z - 2 \end{cases}$$
ed il punto $P(2,-1,3)$:

    (a) Determinare le coordinate del punto P' simmetrico di P rispetto ad r.

    (b) Determinare le equazioni della retta passante per P perpendicolare ad r ed incidente la retta
    $$s : \begin{cases} x - 3z + 3 = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

13. Assegnati i punti $A(2,-1,0)$, $B(0,2,2)$ ed il piano $\alpha : 2x-y-z+1 = 0$:

    (a) Determinare le coordinate del punto C simmetrico del punto B rispetto ad α e l'area del triangolo ABC.

    (b) Determinare le equazioni dei piani passanti per A, perpendicolari ad α ed aventi distanza $\sqrt{3}$ dal punto B.

14. Dati i punti $A(1,0,-1)$, $B(2,1,-1)$ e la retta
$$r : \begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

    (a) Verificare che le rette AB ed r sono incidenti e trovarne il piano che le contiene, le coordinate del punto d'intersezione e uno degli angoli.

    (b) Determinare le coordinate del punto di r equidistante da A e da B.

    (c) Determinare un punto C su r in modo che il triangolo ABC abbia area $\sqrt{3}$.

15. Dati il piano $\pi : x + 2y - 2z + 1 = 0$ e la retta
$$r : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione del piano α contenente r e ortogonale a π.

(b) Determinare i punti della retta

$$s : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

che hanno distanza $d = \sqrt{\frac{3}{2}}$ dalla retta r.

(c) Sia σ la circonferenza intersezione del piano π con la superficie sferica Σ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + h = 0$. Trovare il valore di $h \in \mathbb{R}$ in modo tale che il raggio di σ sia 1.

16. Si considerino le rette r ed s di equazioni, rispettivamente

$$r \ : \ \begin{cases} 3x - 6y + 2z - 2 = 0 \\ 4x - 8y - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad s \ : \ \begin{cases} 2x - 4y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

(a) Si stabilisca se tali rette sono complanari oppure sghembe. Nel caso siano complanari si determini il piano che le contiene; nel caso siano sghembe se ne determinino la retta di minima distanza e la minima distanza.

(b) Si determini la superficie $\mathcal{Q}$ generata dalla rotazione della retta r attorno alla retta s.

17. Siano date le rette r ed s di equazioni, rispettivamente

$$r \ : \ \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} ,t \in \mathbb{R} \qquad s \ : \ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} ,t \in \mathbb{R}$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si calcoli la distanza fra di esse.

(b) Determinare la retta m di minima distanza fra r ed s.

18. Si consideri la curva $\mathcal{L}$ di equazioni

$$\mathcal{L} \ : \ \begin{cases} x = t - t^2 \\ y = 2t + 1 \\ z = t^2 + 1 \end{cases} ,t \in \mathbb{R}$$

(a) Si stabilisca se $\mathcal{L}$ è una curva piana ed, in caso affermativo, si determini il piano che la contiene.

(b) Si determini il cono di vertice nell'origine, avente la curva $\mathcal{L}$ come direttrice (sono sufficienti le equazioni parametriche).

19. Siano dati i punti $A(0,0,-1)$, $B(0,-1,0)$ e $D(1,0,1)$.

    (a) Si verifichi che i tre punti non sono allineati.

    (b) Si determini l'equazione del piano π passante per i tre punti.

    (c) Si determini l'equazione della superficie sferica Σ tangente in A al piano π e passante per il punto $P(3,0,0)$.

20. Si consideri la curva $\mathcal{C}$ di equazioni

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2 \\ z = t^2-1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

    (a) Si stabilisca se $\mathcal{C}$ è una curva piana oppure sghemba.

    (b) Se la curva è piana, si determini il piano che la contiene.

    (c) Si determini la retta tangente alla curva $\mathcal{C}$ nel punto $A(1,0,-1)$.

    (d) Si determini il cono $\mathcal{Q}$ avente l'origine come vertice e la curva $\mathcal{C}$ come direttrice.

21. Si considerino le rette r ed s di equazioni, rispettivamente

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

    (a) Si scriva l'equazione del piano π passante per l'origine parallelo alle rette r e s.

    (b) Si scriva l'equazione della superficie sferica tangente a π in O e avente il centro sul piano $\alpha : x+y-2=0$.

22. Siano dati i punti $A(0,1,0)$, $B(1,1,1)$ e $C(0,0,1)$ e la retta $r : \begin{cases} x = z-1 \\ y = 0 \end{cases}$

(a) Verificare che i tre punti non sono allineati.

(b) Verificare che la retta passante per A e B è complanare con r e determinare il piano π che le contiene.

(c) Determinare le equazioni della circonferenza passante per A, B e C.

23. Data la curva $\gamma \ : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & u \\ y & = & u^2 \\ z & = & 1-u \end{array}\right. \quad , u \in \mathbb{R}$, determinare l'equazione cartesiana del cilindro avente γ come direttrice e con generatrici parallele al vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$.

24. Siano assegnati i punti $A(2, 1, 0)$, $B(-2, 0, -1)$ e $C(-3, 1, 0)$.

    (a) Scrivere le equazioni della retta r passante per A e B.

    (b) Scrivere le equazioni della retta s passante per C, parallela al piano $\pi : x - y + 2z - 1 = 0$ e ortogonale alla retta r.

25. (a) Scrivere le equazioni della retta s passante per $O(0, 0, 0)$,incidente la retta

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = -3t \\ z = 2 - t \end{array}\right. \quad , t \in \mathbb{R}$$

    e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (0, 1, 2)$.

    (b) Si determinino le coordinate del punto sulla retta s equidistante dai punti $A(1, 0, 0)$ e $B(0, 0, 1)$.

26. (a) Si determini il piano β passante per il punto $A(1, -1, 2)$, perpendicolare al piano $\alpha : x + 2y - z = 0$ e parallelo alla retta

$$r : \left\{\begin{array}{l} 3x + y + z = 1 \\ x + y - 2z = 3 \end{array}\right.$$

    (b) Si determinino gli eventuali punti su r a distanza $\sqrt{14}$ dal piano $\pi : x + 2y + 3z - 4 = 0$.

27. Data la retta

$$r : \left\{\begin{array}{l} x - 2z - 4 = 0 \\ y - 3z - 1 = 0 \end{array}\right.$$

(a) Scrivere l'equazione del piano π contenente la retta r e perpendicolare al piano xy.

(b) Calcolare la distanza tra π e l'asse z.

28. Si considerino le rette r ed s di equazioni, rispettivamente

$$r \ : \ \begin{cases} x = 0 \\ y = z-1 \end{cases} \quad , \quad s \ : \ \begin{cases} y = z \\ x = -y \end{cases}$$

   (a) Si stabilisca se tali rette sono complanari oppure sghembe. Nel caso siano complanari si determini il piano che le contiene; nel caso siano sghembe se ne determinino la retta di minima distanza e la minima distanza.

   (b) Si determini la superficie $\mathcal{Q}$ generata dalla rotazione della retta s attorno alla retta r.

29. Siano assegnati i punti $A(2,1,0)$, $B(1,2,3)$ e $C(5,2,3)$, la retta

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

   (a) Dopo aver verificato che i tre punti A, B e C non sono allineati, determinare l'equazione del piano π passante per essi.

   (b) Scrivere l'equazione cartesiana della superficie sferica Σ di centro $(1,-2,-2)$ e tangente a π.

   (c) Scrivere le equazioni della retta s tangente alla curva γ nel punto $P(0,1,1)$.

   (d) Scrivere l'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta dalla rotazione di γ attorno alla retta r.

30. Scrivere le equazioni della retta s perpendicolare al piano π di equazione $2x + 2y - z + 1 = 0$ e incidente le rette

$$a \ : \ \begin{cases} x - 3 = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \quad , \quad b \ : \ \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$