Esercizi di Algebra lineare per il Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, A. A. 2012/2013, I Facoltà di Ingegneria, Politecnico di Bari

1. Sia assegnata la matrice
$$A = \begin{pmatrix} k & k & k-1 \\ -k & -1 & 0 \\ 2 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
con $k \in \mathbb{R}$. Discutere il rango di A al variare del parametro reale k. Posto $k = 0$, determinare la matrice $L = AA^T$ e verificare che $r(L) = 3$. Scelto un minore di ordine 3 non nullo di L, calcolare l'inversa della matrice associata a tale minore.

2. Discutere e risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale h:
$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y + hz = 2 - h \\ hx + z = 4 - h^2 \end{cases}$$

3. In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale $V = L(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ generato dai vettori $\mathbf{v_1} = (1, -2, 4, 0)$, $\mathbf{v_2} = (2, 3, -1, 1)$ e $\mathbf{v_3} = (0, -1, 3, 0)$. Si determini una base e la dimensione di V e si completi tale base ad una base di $\mathbb{R}^4$. Si stabilisca se esiste un valore del parametro reale h per cui il vettore $\mathbf{v_4} = (2 + h, 1, 3, h) \in V$; in caso affermativo, in corrispondenza di tale valore trovato, si esprima $\mathbf{v_4}$ come combinazione lineare dei vettori della base di V. Infine, si verifichi che $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di V e del sottospazio vettoriale $W = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z = 0, y = 0, t = 0\right\}$ e si determinino gli **unici** vettori $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$ tali che $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ dove $\mathbf{u} = (-1, -1, -1, 0)$.

4. In $\mathbb{R}^4$ determinare un sottospazio vettoriale W supplementare di
$$V = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z - 3t = 0, 2x - y + 4z = 0\right\}.$$

5. In $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i seguenti due sottospazi vettoriali
$$\mathcal{H} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0, y + z + 2t = 0\right\}$$

e
$$\mathcal{K} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + ky + kt = 0, x - z = 0\right\}$$
dove $k \in \mathbb{R}$. Si determini la dimensione e una base di $\mathcal{H}$. Si stabilisca se esiste un valore di k tale che il sottospazio somma $\mathcal{H}+\mathcal{K}$ abbia dimensione 3. In tal caso $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$?

6. Risolvere il seguente sistema lineare utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss:
$$\begin{cases} x - 2y + 2z - t = 1 \\ 2x - 4y + 3z + t = 3 \\ 3x - 6y + 5z = 4 \end{cases}$$

7. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali
$$V = L(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$
e
$$W = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - t = 0\right\}$$
con $\mathbf{u} = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 2, 0)$ e $\mathbf{w} = (7, -1, -4, 0)$. Si determinino una base e la dimensione dei sottospazi V, W, $V+W$ e $V \cap W$. Si completi la base trovata del sottospazio di V ad una base di $\mathbb{R}^4$.

8. Discutere e risolvere al variare del parametro reale h il seguente sistema lineare
$$\begin{cases} 2x + hz = 1 \\ 3x + hy - 2z = 2 \\ hx + 2z = 1 \end{cases}$$

9. Usando le proprietà del determinante (operazioni elementari sulle righe o sulle colonne), calcolare il determinante della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Discutere e risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ kx + y + z = 0 \\ x - y - kz = k \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

11. Usando le operazioni elementari sulle righe, calcolare il rango della matrice
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & -1 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 & 4 & 10 \\ -8 & 8 & -6 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

12. Discutere e risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale h
$$\begin{cases} x + 2t = 1 \\ x + y + 3z + 2t = 1 \\ 2x + y + (h+2)z + 4t = 2 \\ x + y + 3z + (h^2 - h + 2)t = h \end{cases}$$

13. Studiare il seguente sistema lineare usando il metodo di eliminazione di Gauss
$$\begin{cases} x - 2y + 2z - t = 1 \\ x - 4y + 2z + t = 3 \\ x - 3y + z + 3t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \end{cases}$$

14. Discutere il rango della matrice
$$C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$
al variare di $a \in \mathbb{R}$.

15. Si considerino le matrici reali
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -h & -h \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & h-2 & h-1 \end{pmatrix}$$
e
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Si stabilisca per quale eventuale valore di $h \in \mathbb{R}$ la matrice $C = A + B^2$ è invertibile. Posto $h = 2$, si determini, se esiste, C^{-1}.

16. Risolvere il seguente sistema lineare omogeneo con il metodo di eliminazione di Gauss
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_2 - 4x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

17. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3, si considerino i vettori

$p_1(x) = -1 + x - x^2 + x^3, \quad p_2(x) = 1 + 3x^2 + 4x^3, \quad p_3(x) = 1 - x + x^3, \quad p_4(x) = x^2$

Si stabilisca se $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ è una base di $\mathbb{R}_3[x]$. In caso affermativo, si determinino le componenti del vettore

$$p(x) = -2 + x - 2x^2 - 3x^3$$

rispetto a tale base.

18. Nello spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali quadrate di ordine 2, si considerino i vettori

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si stabilisca se $\{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$.

19. Risolvere e discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k

$$\begin{cases} x + z + 2t = 2 \\ -x - y + z + t = k^2 \\ 4x + y + 2z + 5t = k \end{cases}$$

20. In $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori $\mathbf{v_1} = (1,3,0,3)$, $\mathbf{v_2} = (-1,-2,1,-1)$ e $\mathbf{v_3} = \left(0, k-1, k^2-1, 3k-2\right)$. Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ in modo che $V = L(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ abbia dimensione 2. Successivamente, completare la base di V ad una base di $\mathbb{R}^4$.