

Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-P)

Modulo II

A.A. 2010-2011 Appello 8/07/2011 Traccia A

Cognome Nome Matr.

1) Sia $A \subset \mathbf{R}^N$ un insieme aperto e $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Dire quali implicazioni sussistono tra le seguenti affermazioni.

1. $f \in C^1(A)$.

2. $\forall x \in A, \forall v \in \mathbf{R}^N \quad \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x)$.

3. $\forall x \in A, \forall v \in \mathbf{R}^N : \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(x + tv) = f(x)$.

Motivare le risposte.

.....
.....
.....
.....

2) Dato l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + z^2 < 4; 1 < y < 6\},$$

determinare l'insieme dei punti di accumulazione, i punti isolati, la chiusura \overline{A} , la frontiera ∂A di A in \mathbf{R}^3 .

.....

.....

.....

.....

3)

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = y^2(x^2 + y^2 - 4x + 3)$$

e studiarne la natura.

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

4)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - y'' = x - \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

5)

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \frac{y^2 \arctan \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq \sqrt{3}x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, x \geq 0\}$.

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-P)

Modulo II

A.A. 2010-2011

Appello 8/07/2011

Traccia B

Cognome Nome Matr.

1) Sia $A \subset \mathbf{R}^N$ un insieme aperto e $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Dire quali implicazioni sussistono tra le seguenti affermazioni.

1. $\forall x \in A \exists \nabla f(x)$.

2. $\forall x \in A, \forall v \in \mathbf{R}^N \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x)$.

3. $\forall x \in A, \forall i = 1, \dots, N \exists \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$.

Motivare le risposte.

.....
.....
.....
.....

2) Dato l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq x \leq 2; y \geq 0; x = z\},$$

determinare l'insieme dei punti di accumulazione, i punti isolati, la chiusura \overline{A} , la frontiera ∂A di A in \mathbf{R}^3 .

.....

.....

.....

.....

3)

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^2(x^2 + y^2 - 4y + 3)$$

e studiarne la natura.

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

4)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' = x + \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

5)

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \frac{x^2 \arctan \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

dove $D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, x \geq 0 \right\}$.

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-P)

Modulo II

A.A. 2010-2011

Appello 21/07/2011

Traccia A

Cognome Nome Matr.

1) Sia $A \subset \mathbf{R}^N$ un insieme aperto e $f \in C^2(A)$. Posto $F(x) = \nabla f(x)$ e $Hf(x) = D^2f(x)$, dire quali delle seguenti affermazioni risultano vere e quali false.

1. $\nabla \wedge F = 0$.

2. $L(F, \Gamma) = 0 \quad \forall$ curva chiusa $\Gamma \subset A$.

3. $Hf(x) \cdot W = 0 \quad \forall x \in A, \forall$ matrice simmetrica W .

Motivare le risposte.

.....
.....
.....
.....

2) Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ e sia $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt \quad \forall x \geq x_0$. Discutere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, esistenza e molteplicit  delle soluzioni dell'equazione $F(x) = k$.

.....

.....

.....

.....

- 3) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^2 y e^{-x-y}$$

e studiarne la natura.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

- 4) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y'' + 9y = 2 \cos 3x - \sin 3x$$

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

- 5) Assegnato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{y+x^2}} - 1, \frac{1}{2\sqrt{y+x^2}} + \frac{2y}{(1+y^2)^2} \right)$$

stabilire se è conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.
Calcolare il lavoro $\mathcal{L}(\mathbf{F}, \gamma)$ fatto da \mathbf{F} lungo la curva

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definita da $\gamma(t) = (2 + \cos t, \sin t)$.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-P)

Modulo II

A.A. 2010-2011

Appello 21/07/2011

Traccia B

Cognome Nome Matr.

1) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Dire quali delle seguenti affermazioni risultano vere e quali false.

1. $\forall z \in (a, b) \exists y_z$ tale che $(z - a)|f(y_z)| \leq \int_a^z |f(x)|dx$.

2. $\forall z \in (a, b) \exists y_z$ tale che $(z - a)|f(y_z)| \geq \int_a^z |f(x)|dx$.

3. $\exists z \in (a, b)$ tale che $f(z) = |b - a|^{-1} \int_a^b f(x)dx$.

Motivare le risposte.

.....

.....

.....

.....

2) Sia $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definita da $F(x, y) = (g(x) + y, x + y)$. Scrivere condizioni sulla funzione $x \mapsto g(x)$ sufficienti a garantire l'invertibilità locale di F in un punto assegnato $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^2$.

.....

.....

.....

.....

3)

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = xy^2 e^{-x-y}$$

e studiarne la natura.

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

4)

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y'' + 4y = \cos 2x - 3 \sin 2x$$

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

5)

Assegnato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{y-x^2}} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}} - 1 \right)$$

stabilire se è conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.

Calcolare il lavoro $\mathcal{L}(\mathbf{F}, \gamma)$ fatto da \mathbf{F} lungo la curva

$$\gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definita da $\gamma(t) = (\cos t, 2 + \sin t)$.

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)