Esercizi sulle applicazioni lineari e sulla diagonalizzazione

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare così definita

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} y - z & x + 2z \\ 3y - 3z & 2x + 4z \end{pmatrix}$$

$a)$ Scrivere la matrice A associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $M_2(\mathbb{R})$;
$b)$ Determinare la dimensione e una base di $Im\, f$ e del $Ker\, f$, stabilendo se f è surgettiva e/o ingettiva.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione così definita

$$f(x, y, z) := (x + 2y, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$a)$ Provare che f è un'applicazione lineare.
$b)$ Scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ e la matrice A' associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ dove $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$. Verificare che $A' = P^{-1}AP$ essendo P la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$.
$c)$ Determinare la dimensione e una base di $Im\, f$ e del $Ker\, f$, stabilendo se f è surgettiva e/o ingettiva.

3. Verificare che $\left\{1 + x^3, x, x^2, x^3\right\}$ è una base di $\mathbb{R}_3[x]$. Successivamente dimostrare che esiste ed è unico l'endomorfismo f di $\mathbb{R}_3[x]$ tale che $f(1+x^3) = 0$, $f(x) = 1 + x^3$, $f(x^2) = x^3$, $f(x^3) = 0$. Dimostrare che $Im\, f = Ker\, f$.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y & 0 \\ y + z & x + z \end{pmatrix}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
$a)$ f è invertibile.
$b)$ $Im\, f$ è il sottospazio delle matrici triangolari basse.
$c)$ $dim(Im\, f) = 2$.

5. Sia $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da:

$$f(A) = A + A^T$$

per ogni $A \in M_2(\mathbb{R})$.
$a)$ Provare che f è lineare ed esplicitare f.
$b)$ Determinare $Ker\, f$ e $Im\, f$ specificando se f è ingettiva e/o surgettiva.
$c)$ Dimostrare che $M_2(\mathbb{R}) = Im\, f \oplus Ker\, f$.

6. Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ l'applicazione tale che

$$f(p(x)) := xp'(x)$$

$a)$ Provare che f è lineare ed esplicitare f.
$b)$ Determinare $Ker\, f$ e $Im\, f$.
$c)$ Trovare $f(V)$ con $V = \left\{-b + bx + ax^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

7. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z, x + y, x - y, z)$$

$a)$ Dopo aver verificato che $\mathcal{C} = \left\{(-1, 0, 0, 0), \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2)\right\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, scrivere la matrice $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ dove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
$b)$ Determinare $Im\, f$ e $Ker\, f$ stabilendo se f è surgettiva e/o ingettiva.
$c)$ Stabilire se esiste un valore del parametro reale h per cui $(0, h, 0, 0) \in Im\, f$.

8. Verificare che $\mathcal{B}' = \left\{1 + x, 1 + 2x + x^2, x - x^2\right\}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$. Sia $f : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ l'unica applicazione lineare tale che

$$f(1 + x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad f(1 + 2x + x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad f(x - x^2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$a)$ Esplicitare $f(p(x))$.
b) Determinare $Im\, f$ e $Ker\, f$.
$c)$ Dopo aver provato che $\mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$, verificare che

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = Q^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) P$$

essendo $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{C}$ la base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, P la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, Q la matrice di passaggio da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$.

9. Sia $f : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione così definita:

$$f(a+bx+cx^2) := \begin{pmatrix} 3b-c & 2c \\ a-b & b \end{pmatrix}$$

$a)$ Dimostrare che f è lineare.
$b)$ Scrivere la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ dove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathcal{C}$ è la base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.
$c)$ Stabilire se f è ingettiva e/o surgettiva.

10. Sia assegnata la seguente matrice a elementi reali:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ k & 1 & -3 \\ -9 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale.
Stabilire per quale eventuale valore di k la matrice A è diagonalizzabile. Determinare, quando è possibile, una matrice P che la diagonalizza.

11. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalle seguenti condizioni:
•$(1,1,0)$ è autovettore di f relativo all'autovalore -1;
•$(1,0,1) \in Ker\, f$;
•$f(0,1,1) = (2,1,1)$.
Determinare l'espressione $f(x,y,z)$ dell'applicazione lineare, scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ associata a f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ e stabilire se f è diagonalizzabile.

12. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ così definito

$$f(x,y,z) = (2x-y+z, x+z, 2x-2y+3z)$$

Stabilire se f è ingettiva e/o surgettiva. Dopo aver verificato che

$$\mathcal{B} = \{(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ associata a f rispetto a tale base. Stabilire, infine, se f è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice P diagonalizzante f.

13. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$Ker\, f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x-y=0\right\}$$

e

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y = 0, z = 0\}$$

Provare che $\mathbb{R}^3 = Ker\, f \oplus V_1$. Scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. L'endomorfismo f è diagonalizzabile?

14. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione così definita

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

$a)$ Provare che f è lineare.
$b)$ Determinare $Im\, f$ e $Ker\, f$ stabilendo se f è surgettiva e/o ingettiva.
$c)$ Scrivere la matrice $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ con $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ base di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}'$ base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.
$d)$ Detta $S = A\left(\hat{4}\,|\,\cdot\right) \in M_3(\mathbb{R})$, stabilire se S è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice P che la diagonalizza.

15. Siano assegnati in $\mathbb{R}^3$ i seguenti vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)\; \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)\; \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)\; \mathbf{w}_1 = (9, 0, 1)\; \mathbf{w}_2 = (-9, 3, 0)\; \mathbf{w}_3 = (9, 0, 0)$$

$a)$ Dimostrare che esiste ed è unico l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$ ed esplicitare $f(x, y, z)$.
$b)$ Scrivere le matrici $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ e $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$ dove $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$; verificare con i calcoli che $A' = C^{-1}AC$, essendo C la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$.
$c)$ Considerato il vettore $\mathbf{v} = (5, -1, 7)$, verificare che $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = C\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}'}$.
$d)$ Stabilire se f è diagonalizzabile.

16. Provare che esiste ed è unico l'endomorfismo f di $\mathbb{R}_3[x]$ che soddisfa le seguenti condizioni:
• $f(1) = x + 2x^3$.
• $x + 2x^3 \in Ker\, f$.
• x e $1 + x^2$ sono autovettori di f relativi all'autovalore 1.

Scrivere esplicitamente l'espressione di $f(p(x))$ e determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$. Successivamente, verificare che la matrice $S = A\left(\hat{1}\,|\,\hat{4}\right)$ è invertibile e calcolarne l'inversa facendo uso del Teorema di Cayley-Hamilton.

17. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $V_{-1} = L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e $\mathbf{w} \in Ker\, f$ con

$$\mathbf{u} = (1, 0, 1)\;\; \mathbf{v} = (1, -1, 2)\;\; \mathbf{w} = (1, 1, 1)$$

Esplicitare $f(x, y, z)$ e scrivere la matrice $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ ove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

18. Sia f_a l'endomorfismo di V_3 tale che:
• $f_a(\mathbf{i}) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - a\mathbf{k}$
•$f_a(\mathbf{j}) = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
•$\mathbf{j} - \mathbf{k}$ è autovettore di f_a relativo all'autovalore 1.
Determinare la matrice $M_{\mathcal{B}}(f_a)$ dove $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ è una fissata base ortonormale positiva di V_3. Per quale valore del parametro reale a, l'endomorfismo f_a è diagonalizzabile?

19. Dopo aver verificato che $\mathcal{C} = \{(1, 2, 3), (1, 0, -1), (0, 0, 2)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto a $\mathcal{C}$ è

$$M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ dove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ ed esplicitare $f(x, y, z)$.

b) Stabilire se f è ingettiva e/o surgettiva.

20. Sono assegnate le matrici ad elementi reali

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 9 & -9 \\ -6 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h+3 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

Stabilire se A è diagonalizzabile e determinare gli eventuali valori del parametro reale h per cui A e B risultano simili.

21. Siano f e g due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ così definiti

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, 3x - z, 2x - y + z)$$

e

$$g(x, y, z) = (x + z, x - y + z, y)$$

Determinare le espressioni di $g \circ f$ e di $f \circ g$. Stabilire se tali endomorfismi sono ingettivi e verificare che

$$M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}(g)\, M_{\mathcal{B}}(f)$$

e

$$M_{\mathcal{B}}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}}(f)\, M_{\mathcal{B}}(g)$$

dove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

22. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ così definito

$$f(x, y, z, t) = (x + y + 3z - 2t, -2x - 6z, -x + y + 3z, -x + y + 3z)$$

a) Determinare $Im\, f$ e $Ker\, f$ stabilendo se f è surgettiva e/o ingettiva.
b) Stabilire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $Im\, f$ e di $Ker\, f$.
c) Stabilire se esiste un valore del parametro reale h per cui $(h+2, 6, -1, h-2) \in Im\, f$.
d) Stabilire se esiste un valore del parametro reale k per cui $(3k, 6k, 2, 3k) \in Ker\, f$.